

ARTÍCULOS



BOLETÍN CIENTÍFICO TECNOLÓGICO

ACADEMIA POLITÉCNICA MILITAR

**APLICACIÓN DE UN MODELO DE PREDICCIÓN PARA
TRAYECTORIA DE MUNICIÓN 155 MM
ESTABILIZADA POR ROTACIÓN**

MAY. CARLOS HERRERA GARCÍA



APLICACIÓN DE UN MODELO DE PREDICCIÓN PARA TRAYECTORIA DE MUNICIÓN 155 MM ESTABILIZADA POR ROTACIÓN

MAY. Carlos Herrera García.¹

Resumen: Los modelos predictivos, representados a través de una ecuación, son el pilar de funcionamiento de un computador de tiro de Artillería, de su software de aplicación y del algoritmo de cálculo de trayectoria. De lo anterior nace la importancia de formular una metodología que permita su implementación, a través de un software para predecir la trayectoria de un proyectil. Para demostrar cada una de las fuerzas y momentos que representan la trayectoria, es necesaria la elección de un modelo de comprensible interpretación física y que, además, sea capaz de entregar resultados de gran exactitud. Una vez seleccionado el modelo, se debe alcanzar un amplio conocimiento técnico acerca de programas de tiro y de balística exterior con el propósito de interpretar cada variable y parámetro que influye en la trayectoria de tiro, cuya formulación matemática se encuentra validada en el caso particular de la munición 155 mm, en el STANAG 4355.

Palabras clave: Computador de tiro de artillería, munición 155 mm, software.

Abstract: Predictive models, represented through an equation, are the Artillery firing computer's function key, as well as its application software and the trajectory calculation algorithm. Hence the importance of formulating a methodology that allows its implementation, through a software to predict the trajectory of a projectile. To demonstrate each of the forces and moments that represent the trajectory, it's necessary to choose a model of understandable physical interpretation and also to be able to deliver results of great accuracy. Once the model has been selected, a broad technical knowledge

¹ Ingeniero Politécnico Militar en Sistemas de Armas, mención Armamento.



about shooting and external ballistics programs must be achieved with the purpose of interpreting each variable and parameter that influences the trajectory of the shot, whose mathematical formulation is validated in the particular case of ammunition 155 mm, in the STANAG 4355.

Keywords: *Artillery firing computer, 155mm ammunition, software.*

1. INTRODUCCIÓN

El constante desarrollo de capacidades militares lleva consigo la generación de nuevas tecnologías, las que son cómplices al momento de integrar el campo de batalla. Este, a su vez, soporta un sinnúmero de unidades, las que deben coordinarse en tiempo y espacio con una alta precisión. Es este último concepto el que envuelve un gran dilema, ya que se contrastan la oportunidad con la efectividad.

Desde comienzos de la guerra, para los desarrolladores de armas ha sido un constante dolor de cabeza el crear un sistema que permita obtener ventajas por sobre las capacidades adversas. Es así como en la actualidad resulta preponderante en el combate contar con unidades de apoyo de fuego, que cuenten con la capacidad de batir objetivos a largas distancias, de forma precisa y oportuna.

Por tanto, en el desarrollo de estos medios de apoyo de fuego, se requiere incluir el diseño de un modelo que realice la predicción de la trayectoria del proyectil, como parte de su sistema de control de fuego. Su creación debe constar de un diseño simple en el contexto de la computación (proceso que consume tiempo), aunque muy preciso desde el punto de vista del funcionamiento en condiciones atmosféricas reales.

Para resolver el problema del modelo correcto, las alianzas de la OTAN recomiendan un modelo simplificado, denominado Modified Point Mass Trajectory Model (modelo de masa puntual modificada), descrito en STANAG 4355,² un acuerdo de normalización OTAN. Este modelo puede usarse en sistemas de control de fuego, como también para la creación de computadores balísticos de artillería. Sin embargo, la aplicación del modelo de masa puntual modificada, en un sistema de control de fuego, requiere de la elaboración y estimación de datos específicos del proyectil, sus características aerodinámicas y factores de adaptación.

2 Standardization Agreement.



1.1. La problemática en el desarrollo de modelos predictivos en la institución

Para desarrollar un modelo es necesario realizar un análisis de los estudios teóricos implementados, así como también de los datos técnicos requeridos que serán la base inicial para la sustentación de la solución matemática.

El buen desarrollo de un modelo, sumado a la validación de su aplicabilidad permitirá sortear una brecha teórica-experimental en la investigación y desarrollo, como también mejorar el control en materia de balística exterior.

Actualmente, tanto en el Ejército como en sus organismos dependientes encargados del control, ven restringidos sus alcances a los resultados que puedan entregar plataformas tecnológicas que, si bien son eficaces, también son complejas de usar. Lo anterior, sumado a los limitados conocimientos teóricos acerca de su funcionamiento, hacen que estos no se empleen en forma eficiente. Por otra parte, constan de licencias y algoritmos matemáticos de conocimiento exclusivo del fabricante, que son construidos en una arquitectura cerrada, lo que hace imposible conocer y comprender su funcionamiento; del mismo modo, se hace aún más complejo la reparación tanto del software como del hardware, lo que trae como consecuencia gastos de una consideración no menor y tiempo de espera, con lo que se asume también el riesgo de no contar con los medios suficientes para el control, ante un requerimiento del escalón superior.

2. ANÁLISIS DE LA TEORÍA EXISTENTE

2.1. Generalidades

La información existente sobre balística es bastante y muy disgregada, tanto si consideramos, además, sus distintas ramas (balística interior, intermedia, exterior y de efectos). Para el estudio del tema, los esfuerzos se centrarán en el análisis de la balística exterior, lo que considera el recorrido del proyectil desde que sale por la boca del cañón hasta que impacta en el objetivo.

Para analizar la balística exterior, es necesario considerar una serie de factores que afectan la trayectoria; algunos son propios del proyectil, como la geometría, peso, calibre, rotación, etc. Otros, sin embargo, son característicos del medio como la densidad, temperatura, viscosidad y presión.

Por todo lo anterior, es necesario estudiar la estabilización durante el vuelo, el efecto giroscópico y la resistencia aerodinámica entre otros, factores constitutivos a la hora de evaluar y representar la trayectoria del proyectil durante su vuelo, a través de un algoritmo.



2.2. Fuerzas aerodinámicas y los momentos actuando sobre un proyectil

Las principales fuerzas y momentos que actúan sobre un proyectil en vuelo son de dos tipos distintos: fuerzas estáticas y momentos. Ambos son dependientes sobre la actitud y velocidad traslacional del proyectil y fuerzas dinámicas y momentos, los que, a su vez, son dependientes también de la velocidad angular.

2.3. Modelación de trayectorias

La trayectoria de un proyectil puede ser modelada usando diferentes metodologías. Las técnicas más comunes son el modelo al vacío, el modelo de masa puntual y el modelo de masa puntual modificada.

El modelo al vacío es el que representa la trayectoria más simple, ya que calcula la trayectoria basada en la cinemática de una masa puntual. Dado que la fuerza de arrastre es ignorada. La desventaja principal asociada a este modelo es que el resultado de predicción de trayectoria de un proyectil disparado por obús es limitado. Por otra parte, el modelo al vacío es razonablemente preciso para calcular las trayectorias de los misiles balísticos, que pasan la mayor parte de su tiempo de vuelo fuera de la atmósfera terrestre, donde la única fuerza que actúa sobre el misil es la gravedad de la Tierra.

El modelo de masa puntual, por su parte, toma en consideración el arrastre y las condiciones atmosféricas, además de ser capaz de proporcionar resultados relativamente precisos con capacidad de computación limitada. La predicción de la trayectoria puede mejorarse con el aumento del grado de libertad (DOF) en el modelo de masa puntual. El modelo de masa puntual más simple es el modelo de dos grados de libertad (2 DOF) que tiene el arrastre y los componentes de gravedad. El 2 DOF puede ser mejorado por la inclusión del movimiento de deflexión.

Por otra parte, la mejora al modelo de masa puntual es el modelo de masa puntual modificada. Este es más complejo, puede tener desde tres hasta seis grados de libertad, por lo que es capaz de predecir la trayectoria con buenas precisiones. Sin embargo, un modelo de masa puntual modificado requiere más recursos informáticos.

A continuación se da conocer en forma detallada el modelo de Masa Puntual Modificada, el que será empleado para demostrar cómo se desarrolla y aplica un algoritmo de 3 DOF.



2.4. Modelo de Masa Puntual Modificada

El modelo de masa puntual modificada entrega una mayor exactitud que el modelo de masa puntual. En el modelo de masa puntual modificada, se incluyen los efectos debidos a la velocidad de giro de un proyectil, como el ángulo de ataque o desvío, tanto en el plano lateral como en el plano de la trayectoria y se tiene en cuenta para calcular la deriva y el arrastre.

Otro efecto a considerar es el efecto “Magnus”. El momento Magnus, después de una perturbación, genera un momento incremental de la nariz hacia arriba que se opone al efecto giroscópico. Esto conduce, posteriormente, a la inestabilidad del proyectil. El efecto Magnus, en un proyectil, aumenta con la elevación y conduce a un aumento en el ángulo de ataque. Así, este fenómeno podría hacer que el proyectil se deslice hacia la izquierda, contrarrestando el efecto giroscópico (Cucharero, 1992).

En el modelo de masa puntual modificada, la elevación, la fuerza de Magnus y la aceleración de Coriolis se incluyen en las ecuaciones de aceleración. Además, la trayectoria en el rango y deflexión se acopla, lo que vuelve complicado el cómputo. La aceleración del proyectil, usando el modelo de masa puntual modificado, viene dada por la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{a} = \vec{a}_D + \vec{a}_L + \vec{a}_{M_m} + \vec{a}_g + \vec{a}_\Lambda$$

Donde:

D vector de la fuerza de arrastre

L vector fuerza de elevación

M_m momento Magnus

Λ aceleración Coriolis

De la ecuación vectorial, se deben obtener las ecuaciones de movimiento y posición, ya que estas serán fundamentales al calcular la predicción del tiro para el proyectil, que será el de 155 mm, en este caso de uso.



3. PLANTEAMIENTO DE VARIABLES Y DEL MODELO DE PREDICCIÓN DE TRAYECTORIA

El planteamiento del modelo requiere considerar las variables necesarias que permitan modelar, con la mayor realidad posible, la trayectoria que generaría el proyectil balístico desde el instante de salida del tubo y el término del efecto de los gases, hasta el punto de impacto del proyectil.

Para explicar de mejor manera el modelo, se presenta el planteamiento de las variables y las condiciones establecidas para generar el modelo matemático. Para el desarrollo, las variables se separarán en dos grupos, estos son:

- a. Variables externas de la munición: son todas las variables externas del proyectil balístico que lo afectan en la trayectoria.
- b. Variables de la munición: son todas las variables propias del proyectil balístico que inciden en la trayectoria del mismo.

Las variables externas del proyectil balístico que se implementarán en los modelos de predicción de trayectoria corresponden a las atmosféricas y las de ubicación geográfica.

3.1. El modelo de trayectoria de masa puntual modificada

El MPMTM, también conocido como el modelo de 3 grados de libertad, se describe en STANAG 4355. Este modelo representa el vuelo de proyectiles estabilizados por giro que son dinámicamente estables y poseen al menos simetría trigonomial. Su base es un modelo convencional de masa puntual, pero además se calcula la guiñada o ángulo de ataque (YAW), de equilibrio instantáneo en cada paso de tiempo a lo largo de la trayectoria, para proporcionar estimaciones de los efectos de guiñada, arrastre, desviación y fuerza de Magnus resultantes de la guiñada de reposo.

El modelado a emplear, se realiza principalmente por:

- a. Inclusión de solo las fuerzas y momentos más esenciales.
- b. La aproximación de la guiñada real por la guiñada de reposo, despreciando el movimiento de guiñada transitorio.
- c. La aplicación de factores de adaptación a algunas de las fuerzas anteriores para compensar su desviación o aproximaciones de otras fuerzas y momentos.



4. MODELO LÓGICO DE PROGRAMACIÓN

4.1. Modelo Lógico

El modelo empleado para la trayectoria de 3 DOF se escribió empleando el software MATLAB versión 2016. Para programar el modelo se crearon diferentes módulos como se muestra en la figura N° 1.

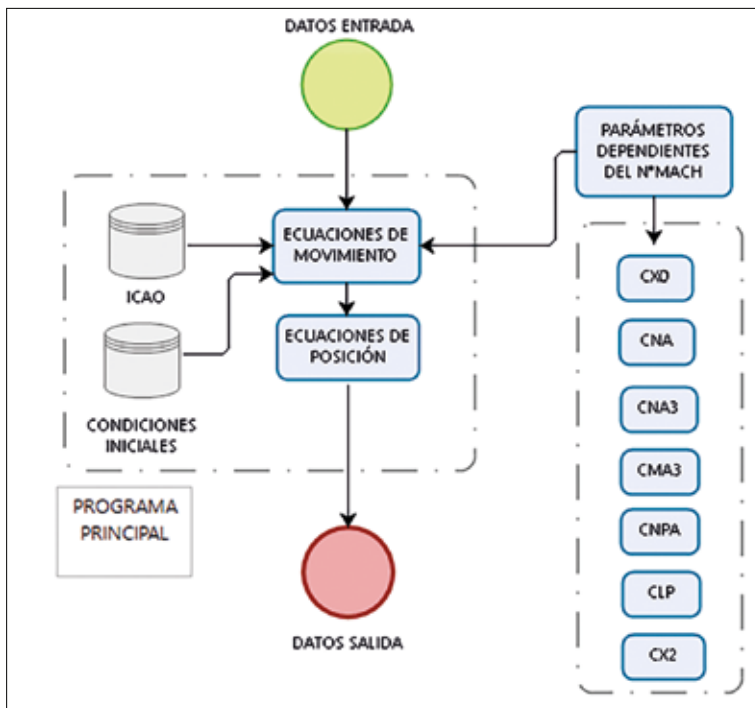


Figura N° 1: "Modelo Lógico".

Fuente: elaboración propia en Software BIZAGI (2017).

4.2. Datos de entrada

La entrada es utilizada para ingresar los datos de cálculo requeridos en la trayectoria nominal y en las derivadas parciales del programa. Permite al usuario ingresar la velocidad en boca, el ángulo de elevación y azimut en grados sexagesimales.

4.3. Programa Principal

El programa principal lee la información del archivo de entrada, variables y constantes que no cambian como la fuerza gravitacional, la constante de los gases y las condiciones



propias que entrega la normalización ICAO,³ que están codificadas en este archivo para el cálculo de la trayectoria.

Para el cálculo de la trayectoria, en este programa principal se extrae, de las subfunciones dependientes del número de mach, los parámetros interpolados y, posteriormente, se realizan todos los cálculos de la ecuación de movimiento, ecuaciones cinemáticas escalares, componentes del viraje de los vectores, la obtención de velocidades, etc. Los resultados se compilan y se muestran en un archivo de salida.

El propósito del programa principal es calcular la trayectoria del proyectil dadas las condiciones de entrada. Este se puede utilizar en cualquier otro programa de Matlab siempre que se cumplan los requisitos de entrada. El programa principal controla las variables que se extraen de las subfunciones de trayectoria en lugar de leer directamente desde el archivo de entrada. Por ejemplo, en el cálculo de la trayectoria nominal, las entradas al programa de trayectoria son las mismas que desde el archivo de entrada; sin embargo, al calcular el efecto de la unidad para la velocidad inicial en boca, la velocidad en boca que pasaría al programa de trayectoria sería diferente del valor nominal leído del archivo de entrada.

4.4. Parámetros dependientes del número de Mach

Los parámetros dependientes del número de mach corresponden a subfunciones, las que fueron programadas con la finalidad de interpolar todos aquellos valores dependientes del número de mach. Estos valores, a su vez, fueron obtenidos desde el software PRODAS, a través de predicciones realizadas para el tipo de munición empleada (M 107).

4.5. Datos de salida

En los datos de salida, el software emitirá los resultados de la trayectoria, siempre que no se requiere otros cálculos, producto del ingreso de datos erróneos. Por otro lado, si se requieren otros cálculos, el software requerirá del ingreso nuevamente de los datos de entrada.

4.6. Funciones de Programación

Las funciones programadas empleadas en el software se representan a través del siguiente diagrama de flujo:

3 Estandarización impuesta por la Organización de Aviación Civil Internacional.

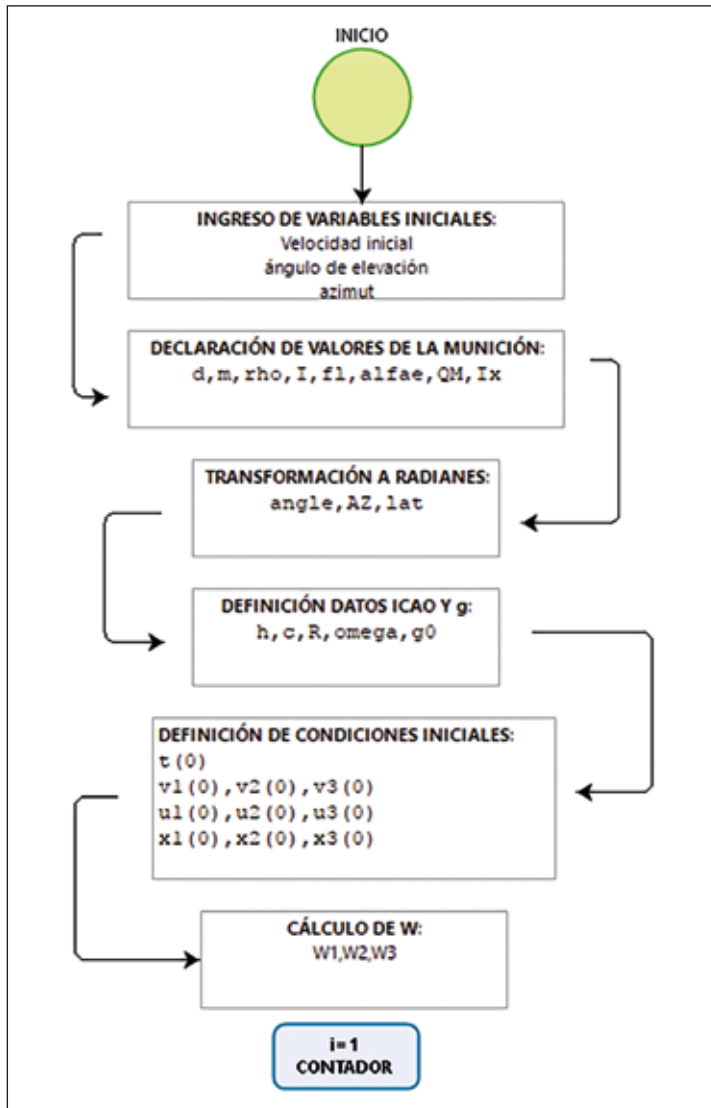


Figura N° 2: "Diagrama de Flujo".

Fuente: elaboración propia en software BIZAGI (2017).

El orden estipulado en la programación permite, a través del programa, ingresar las variables iniciales requeridas, para luego reconocer todas aquellas constantes propias de la munición, gravedad, ubicación geográfica, de la normalización ICAO y de la transformación de grados sexagesimales a radianes, para, posteriormente, definir las condiciones iniciales del tiempo, velocidad, movimiento y posición. Una vez definido todo lo anterior, el programa realiza los primeros cálculos, que corresponden al vector de rotación de la tierra, que más tarde será incluido en los cálculos siguientes.

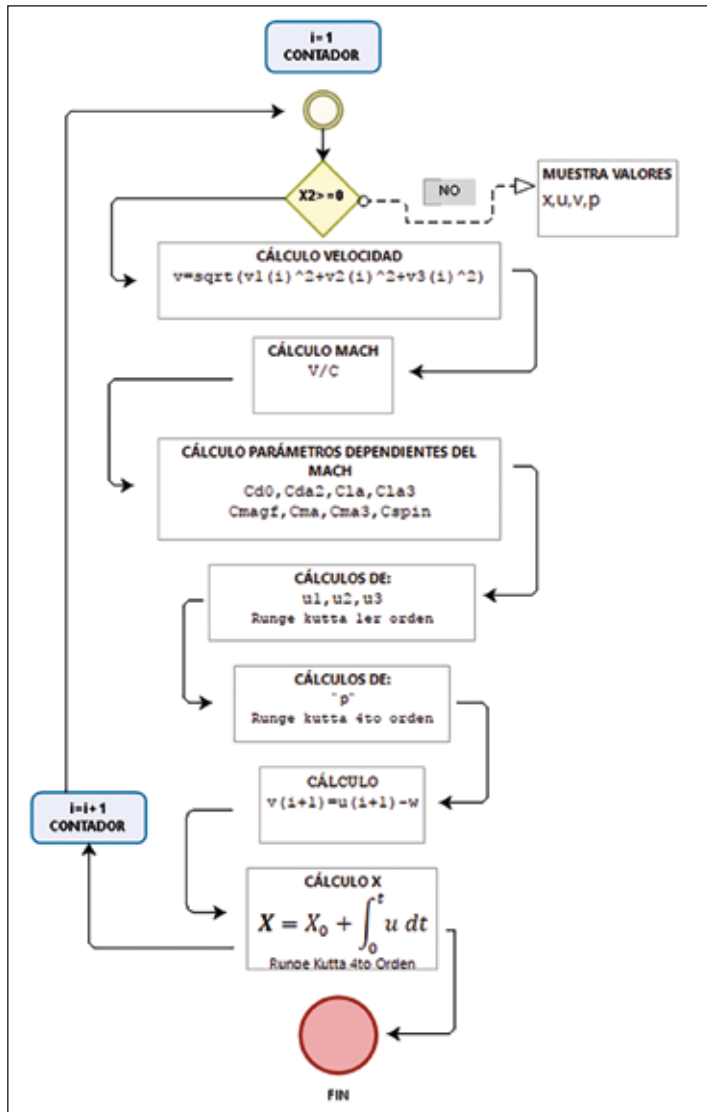


Figura N° 3: "Diagrama de Flujo".

Fuente: elaboración propia en software BIZAGI (2017).

Luego de los cálculos realizados para el vector de la rotación terrestre, el programa condiciona la continuación de la programación a que el proyectil se encuentre por sobre la altura horizontal del tubo. Aprobando la condicionalidad de altura, el programa calcula la velocidad del proyectil, velocidad que opera con respecto a la velocidad del sonido para la obtención del número de mach, con la finalidad de poder calcular todas aquellas variables dependientes de este. En esta instancia el programa reconoce el número de mach e ingresa cada variable programada como subfunción, obteniendo



la información en forma directa o interpolando si fuera necesario. Una vez obtenidos los parámetros dependientes del número de mach, el programa procede a realizar las operaciones programadas para los cálculos de las ecuaciones de movimiento y cálculo de la velocidad de giro del proyectil, para luego calcular nuevamente la velocidad de este, pero ahora incluyendo los resultados obtenidos de las ecuaciones de movimiento y de los vectores de rotación terrestre.

El proceso siguiente es el cálculo de las ecuaciones de posición, donde el programa obtiene la ubicación del proyectil para los ejes representados en la programación (3 DOF). El programa finaliza entregando en pantalla los antecedentes correspondientes al impacto del proyectil.

4.7. Solución numérica

El modelo de masa puntual modificada considera el movimiento del proyectil alrededor de su eje longitudinal de simetría y representa cuatro grados de libertad, es decir, tres coordenadas de traslación para describir la posición y una para la velocidad angular (deflexión). Un efecto importante que debe ser comentado es el ángulo de ataque o yaw, que es el ángulo entre el vector de velocidad de los proyectiles (medido respecto a la atmósfera) y el vector unitario orientado en la misma dirección que el eje de simetría de los proyectiles. En el modelo de masa puntual modificado, este ángulo se incorpora en las ecuaciones matemáticas como un valor promedio estimado (guiñada o yaw en reposo) que influye en el cálculo de las fuerzas de Lift y Magnus, ambas de naturaleza aerodinámica.

Para resolver numéricamente la ecuación que rige el modelo, se elaboró un código computacional en el software MATLAB ya comentado, este es un algoritmo empleando el método Runge-Kutta,⁴ de cuarto orden, con paso de integración constante.

A partir de datos del proyectil, información atmosférica y condiciones iniciales, el programa modularmente resuelve las ecuaciones en una forma iterativa y determina las coordenadas de posición del proyectil para cada momento en el tiempo. Se llevaron a cabo simulaciones bajo diferentes condiciones iniciales, para verificar la sensibilidad de la solución. Las pruebas indicaron independencia con un $dt = 0,01$ segundo.

Se debe considerar que el coeficiente de fuerza de arrastre del proyectil dependiente del número de mach fue dado por el programa PRODAS.

4 Método iterativo mediante la resolución de ecuaciones diferenciales.



5. VALIDACIÓN DEL MODELO EN UN CASO DE USO

En el desarrollo del modelo de trayectoria es fundamental la precisión empleada en los datos como en el cálculo numérico, con la finalidad de que los resultados entregados tengan el menor error posible.

Las fuerzas sobre el proyectil son variadas, siendo la de mayor predominio la resistencia a la tracción o roce y la gravedad. El cambio de estado del sistema se describe utilizando las leyes físicas simples que gobiernan el movimiento de aceleración. Las velocidades, aceleraciones y posición horizontales y verticales, debidas a estas fuerzas, se calculan a través de sucesivos puntos en el tiempo. Si el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño, la simulación de la trayectoria puede ser preciso.

5.1. Obtención de datos y condiciones iniciales

Para la validación del modelo construido, se llevará a cabo su aplicación en un caso de uso. Para el caso de uso se empleará la munición M-107, cuyas características se detallan en la siguiente tabla.

Tabla N° 1: “Antecedentes del proyectil”

TIPO	M 107	HE
Peso	43,096	kg
Velocidad inicial	600	m/s
Elevación	25	grados
Velocidad de giro	1216,6	Rad/s
Momento axial inercia	0,142476	kg/m ²

Fuente: elaboración propia (2017).

Tabla N° 2: “Datos atmosféricos”

TIPO	ICAO	
Densidad aire	1,2250	kg/m ³
Temperatura	15	°C
Viento	0	m/s

Fuente: elaboración propia (2017).



Para comparar los resultados de las implementaciones computacionales de los modelos presentados, se seleccionó una trayectoria, caracterizada por dos condiciones iniciales: velocidad de lanzamiento y el cuadrante de elevación. Para el tipo de proyectil empleado, los coeficientes aerodinámicos que varían con el número de mach fueron extraídos del software PRODAS, particularmente de sus módulos dedicados a la balística externa.

Para las trayectorias del modelo de masa puntual modificada, se asumió un spin inicial de 1216,6 rad/s, correspondiente al valor de velocidad inicial seleccionada. Las velocidades del viento fueron nulas a lo largo de este análisis.

Las trayectorias de los modelos de masa puntual modificadas nunca son planas, muestran una desviación lateral del proyectil desde el plano vertical. Incluso cuando no hay viento transversal, el proyectil describe una trayectoria tridimensional. Es precisamente por eso que estos dos modelos (PRODAS y 3 DOF) son mejores que los de masa puntual, ya que nos permiten medir y predecir el movimiento transversal del proyectil.

En las simulaciones de trayectorias con el modelo de masa puntual modificado, la velocidad de rotación se convierte en un parámetro importante. Para ángulos de elevación de hasta 30 grados, cuyas trayectorias son más tensas, los resultados obtenidos con este modelo están más próximos a los datos experimentales que los obtenidos sobre la base de modelos de predicción. Aplicando una tolerancia de 30 m en alcance y 10 m en altura máxima los resultados son satisfactorios para ángulos de elevación cercanos a los 30 grados, incluyendo el movimiento transversal.

5.2. Comparación y análisis de los datos de tiro

Los resultados obtenidos en el modelo programado con 3 grados de libertad se comparan con los resultantes de la predicción realizada en el software PRODAS, a través de las siguientes tablas:

Tabla N° 3: “Comparación de alcances máximos”

Q°	PROGRAMA	ALCANCE (METROS)	ERROR (METROS)	ERROR RELATIVO (%)
15°	PRODAS	9.580	+0.28 (DOF)	0.00
	3 DOF	9.580		
25°	PRODAS	12.661	-8 (DOF)	0.06
	3 DOF	12.653		
30°	PRODAS	13.801	-5 (DOF)	0.04
	3 DOF	13.806		



Q°	PROGRAMA	ALCANCE (METROS)	ERROR (METROS)	ERROR RELATIVO (%)
45°	PRODAS	15396	-26 (DOF)	0.17
	3 DOF	15370		

Fuente: elaboración propia (2017).

Tabla Nº 4: “Comparación de alturas máximas”

Q°	PROGRAMA	ALTURA MÁXIMA (METROS)	ERROR (METROS)	ERROR RELATIVO (%)
15°	PRODAS	841	+2 (DOF)	0.24
	3 DOF	843		
25°	PRODAS	1.954	+5 (DOF)	0.26
	3 DOF	1.959		
30°	PRODAS	2.613	+5 (DOF)	0.19
	3 DOF	2.618		
45°	PRODAS	4.862	-8 (DOF)	0.16
	3 DOF	4.854		

Fuente: elaboración propia (2017).

Tabla Nº 5: “Comparación de deflexiones máximas”

Q°	PROGRAMA	ERROR POR DEFLEXIÓN (METROS)	ERROR (METROS)	ERROR RELATIVO (%)
15°	PRODAS	-90.16	+0.44 (DOF)	0.49
	3 DOF	-90.60		
25°	PRODAS	-206	-1 (DOF)	0.49
	3 DOF	-205		
30°	PRODAS	-277	-1 (DOF)	0.36
	3 DOF	-276		
45°	PRODAS	-548	+3 (DOF)	0.54
	3 DOF	-551		

Fuente: elaboración propia (2017).

Tabla Nº 6: “Comparación de máximos tiempos de vuelo”

Q°	PROGRAMA	TIEMPO DE VUELO (SEG.)	ERROR (SEG.)	ERROR RELATIVO (%)
15°	PRODAS	25.64	-0.05 (DOF)	0.20
	3 DOF	25.59		



Aplicación de un modelo de predicción para trayectoria de munición 155 mm estabilizada por rotación.

Q°	PROGRAMA	TIEMPO DE VUELO (SEG.)	ERROR (SEG.)	ERROR RELATIVO (%)
25°	PRODAS	38.77	-0.02(DOF)	0.05
	3 DOF	38.75		
30°	PRODAS	44.89	+0.03 (DOF)	0.07
	3 DOF	44.92		
45°	PRODAS	61.85	-0.15 (DOF)	0.24
	3 DOF	61.70		

Fuente: elaboración propia (2017).

Tabla N° 7: “Comparación de spin final”

Q°	PROGRAMA	SPIN (RAD/SEG.)	ERROR (RAD/ SEG.)	ERROR RELATIVO (%)
15°	PRODAS	969.80	+0.9 (DOF)	0.09
	3 DOF	970.70		
25°	PRODAS	903.09	+0.55 (DOF)	0.06
	3 DOF	903.64		
30°	PRODAS	881.01	+1.19 (DOF)	0.13
	3 DOF	882.20		
45°	PRODAS	850.56	-1.56 (DOF)	0.18
	3 DOF	849.00		

Fuente: elaboración propia (2017).

5.3. Análisis de los datos de tiro

El modelo obtuvo resultados generales muy próximos a los datos previstos por la tabla de tiro. Para trayectorias parabólicas más tensas, el modelo de masa puntual modificado respondió entregando buenos resultados.

Velocidades en boca como la de 600 m/s son empleados con la finalidad de buscar una estabilidad por parte del proyectil durante el vuelo, específicamente en aquellos estabilizados por rotación donde se busca que el ángulo de caída sea el correcto y, así, evitar la falta o el exceso de spin, lo que afecta directamente en la acción sobre la espoleta y, por ende, hace que se produzca la detonación del proyectil.

En la actualidad la lógica indica que, para alcanzar distancias distintas a las máximas, se debe emplear la carga necesaria o suficiente para dar alcance al objetivo, por lo que se reduce, de esta forma, el esfuerzo realizado por el obús. Como primer beneficio, se puede apreciar la reducción del desgaste del obús y su sistema



de retroceso, lo que mejora la vida útil de este y su calidad operacional. Otro beneficio que tiene directa relación con la trayectoria del proyectil es la reducción del cuadrante o ángulo de elevación. La reducción del ángulo de elevación, producto de la regulación del propelente mediante la distribución de cargas de proyección, permite al proyectil realizar una trayectoria más tensa, donde, a su vez, influyen una menor cantidad de factores que puedan perturbar su desplazamiento, es decir, desde el punto de vista atmosférico recorrerá menos capas (boletín meteorológico) para alcanzar su objetivo, lo que se traduce en un recorrido que permita alcanzar una mayor precisión.

5.4. Validación de los errores obtenidos

Todas las medidas experimentales vienen afectadas de una imprecisión inherente al proceso de medida, puesto que en el proceso se compararon procedimientos similares en instrumentos de distintas capacidades.

Se puede aseverar, entonces, que las medidas físicas obtenidas a través de un algoritmo matemático traen consigo una “medida incorrecta” de manera intrínseca. Dicho de otra manera, si llamamos “error” a la diferencia que existe entre la medida y el valor “verdadero” de la magnitud, siempre existirá este error.

En lo que se refiere a aparatos de medida, hay tres conceptos muy importantes que permiten evaluar los resultados obtenidos, como la exactitud, precisión y sensibilidad.

Desde el punto de vista de la exactitud, que se define como el grado de concordancia entre el valor “verdadero” (PRODAS) y el experimental (3 DOF), se puede aseverar que los datos de tiro obtenidos en el modelo construido son muy próximos a los valores empleados para la validación, ya que ningún error relativo supera el 0.54%, en alcance, altura, deflexión, spin y tiempo.

En cuanto a la precisión, que hace referencia a la concordancia entre las medidas de una misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales, es difícil afirmar que los datos de tiro obtenidos sean precisos, ya que no se conoce la sensibilidad de las mediciones y la magnitud de los errores asumidos por parte del software PRODAS. Dicho de otra forma, la exactitud implica normalmente precisión, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que pueden existir aparatos muy precisos que posean poca exactitud, debido a errores sistemáticos, como el “error de cero”, etc.

En conclusión, respecto a la precisión es válido decir que los modelos empleados en ambos aparatos de predicción (PRODAS y 3 DOF) son de similar implementación



matemática, por lo que sus algoritmos entregan una muy aproximada precisión, considerando que no han sido probados y comparados en terreno realizando tiro de artillería.

Para finalizar, el último concepto es la sensibilidad, que relaciona el valor mínimo de las magnitudes que un aparato puede medir. La sensibilidad del modelo construido consta de la capacidad necesaria para equiparar los resultados de tiro entregados por el software PRODAS, es decir, una cantidad de hasta dos decimales, lo que es aceptable, considerando que, para resultados en metros, basta solo dos de estos para hacer una buena aproximación. Hay que recordar que el batimiento de objetivos en la Artillería es sobre la base del efecto que realizan las armas, en su acción en masa.

6. CONCLUSIONES

6.1. Conclusión general

El desarrollo del modelo representativo de una trayectoria contempla el manejo de una serie de factores, variables y constantes, los cuales, en gran parte, son referenciados en la bibliografía de manera conceptual, obviando el valor numérico que este representa para la formulación matemática. Lo anterior constituyó un desafío importante para la investigación, por lo que se debió apuntar los esfuerzos a la búsqueda de artículos y estudios relacionados al análisis de trayectorias, particularmente de munición 155 mm estabilizada por rotación.

La validación de la formulación del modelo, adaptado del STANAG 4355, establece la base para la definición de un modelo de 3 DOF, de gran exactitud y precisión para estos calibres que cubren distancias inferiores a los 30 km.

6.2. Conclusiones específicas del modelo

- a. La consideración de la fuerza de arrastre es fundamental en el cálculo de la trayectoria para modelos de predicción, ya que esta es capaz de reducir aproximadamente el 60% del alcance de un proyectil. Comparándolo con un modelo al vacío, esta consideración hace que el modelo sea más exacto.
- b. Un modelo de trayectoria de 3 DOF es fácil de implementar y sus cálculos son menos intensivos que en un modelo superior de 6 DOF. La simplicidad del modelo 3 DOF implementado permite una mayor comprensión de la mecánica en su trayectoria, produciendo a la vez resultados precisos.
- c. La simulación a través del programa empleado (MATLAB) arrojó tiempo de cálculos cercanos a los 13,5 segundos, lo que en condiciones reales de tiro puede ser



considerado excesivo, si se asume que se busca reducir los tiempos de cálculo al mínimo, por lo que se debe implementar el modelo en otro programa para facilitar la velocidad de respuesta.

- d. El modelo obtuvo resultados generales muy próximos a los datos previstos por las tablas de tiro entregadas por el software PRODAS. Para trayectorias más tensas, con pequeños ángulos de elevación, el modelo de masa puntual modificado dio mejores resultados y menores tiempos de respuesta en su cálculo.
- e. Un antecedente de ajuste tiene que ver con el método numérico a emplear. En este caso se empleó un Runge Kutta de cuarto orden, método propuesto en gran parte de la bibliografía consultada, por ayudar a minimizar el almacenamiento en el computador y por su gran efectividad en el cálculo de errores circulares. En este método se aplican también ajustes para cada intervalo de cuadrante de elevación.
- f. A partir de los datos del proyectil M 107 seleccionado, la información atmosférica y condiciones iniciales, el programa modularmente codificado resuelve las ecuaciones de forma iterativa, determinando las coordenadas de posición del proyectil para cada momento en el tiempo. Se llevó las simulaciones con diferentes etapas fijas de tiempo, para verificar la sensibilidad de la solución a los pasos mencionados. Las pruebas revelaron independencia (menos necesidad de ajustes) hacia el paso del tiempo de $\Delta t = 0.01s$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ARROW Tech, Inc. Manual del Usuario: versión 3.3.2.PC-PRODAS, 1999.
- [2] CARLUCCI, Jacobson. Ballistics.Boca Ratón: CRC Press, 2008.
- [3] CHAPRA, Steven (2012). *Applied Numerical Methods with MATLAB*. New York: McGraw-hill.
- [4] CUCHARERO PÉREZ, Francisco (1992). *Balística Exterior*. Málaga: Ministerio de Defensa.
- [5] DIVEDUC (2011). *Guía para la redacción de citas bibliográficas*. Santiago de Chile: División Educación.
- [6] Fab. Defense. Catálogo 2015. Fab. Defense, 2015.
- [7] GILLES, Brassard (1997). *Fundamentos de Algoritmia*. Madrid: Prentice Hall.



- [8] GÓNZALEZ MORALES, Agustín (2011). *Fundamentos de Balística*. Madrid: Ministerio de Defensa.
- [9] HERNÁNDEZ PAVÉZ, Ramón (2008). *Mecánica Técnica*. Santiago de Chile: Ediciones USACH.
- [10] HERNÁNDEZ SAMPIERI, Roberto; FERNÁNDEZ, Carlos y BAPTISTA, Pilar (2006). *Metodología de la Investigación*. México D.F.: Infagon.
- [11] HERRERA GARCÍA, Carlos. “Aplicación de un modelo de predicción para trayectoria de munición 155 mm. estabilizada por rotación”. Director: mayor Óscar Torres Arias. [Memoria para la obtención de Título]. Academia Politécnica Militar: Santiago de Chile, 2017.
- [12] INTERNATIONAL Estándar ISO. ISO 2533.Suiza: The ISO Standard Atmosphere, 1975.
- [13] McCOY, Robert (1999). *Modern Exterior Ballistics*. Atglen: Schiffer Publishing.
- [14] OTAN (2009). *The Modified Point Mass and Five Degrees of Freedom Trajectory Models*.STANAG 4355 (Edition 3).
- [15] ASCHER, Uri y PETZOLD, Linda (1998). *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [16] REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. RAE. [Fecha de consulta: 3 de septiembre de 2016]. Disponible en: <http://www.rae.es>.
- [17] REAL REGIMIENTO DE ARTILLERÍA (2016). *Libro de Balística y Armamento Mayor*. Inglaterra: Ediciones Real Regimiento de Artillería.
- [18] RÍOS, Sixto (1999). *Modelización*. Madrid: Alianza.
- [19] SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS (1998). *Effect of the mathematical model and integration step on the accuracy of the results of computation of artillery projectile flight parameters*.Polonia: Faculty of Mechatronics and Aerospace, Military University of Technology.